



Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/10877>

To cite this version :

S MALHERBE, Stéphane BENAYOUN, Anne MOREL, Alain IOST - Caractérisation mécanique de matériaux élastoplastiques - utilisation d'indenteurs axisymétriques - Matériaux & Techniques - Vol. 93, n°7-8, p.213-228 - 2005

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : scienceouverte@ensam.eu



Caractérisation mécanique de matériaux élastoplastiques – utilisation d’indenteurs axisymétriques

S. Malherbe¹, S. Benayoun¹, A. Morel¹ et A. Iost²

¹ LPMI – EMSM, Ensam, 2 Bd. du Ronceray, 49035 Angers, France

² LMPGM – ESI, Ensam, 8 Bd. Louis XIV, 59046 Lille, France

Mots-clés :

Indentation ; dureté ; loi de comportement ; éléments finis

Key words:

Indentation; hardness; constitutive behaviour; finite elements

Résumé – Dans cet article, nous présentons une expression de la courbe d’indentation instrumentée d’un matériau élastoplastique pouvant s’écrouir. Cette expression nécessite d’explicitier la pression moyenne de contact entre l’indenteur et le matériau, ainsi que de tenir compte de la forme que prend la surface du matériau sous l’indenteur. Le cas d’un indenteur conique est d’abord étudié ; puis l’expression est généralisée aux indenteurs d’autres formes (supposés axisymétriques). Les résultats sont comparés aux modèles déjà existants.

Abstract – Mechanical characterization of elastoplastic materials – use of axisymmetric indenters. In this article, an expression of the depth-sensing indentation curve for strain-hardening materials is introduced. This expression requires to formulate the mean contact pressure between the indenter and the material and to account for the shape of the material surface under the indenter. The case of a conical indenter is first studied, and extended to other axisymmetric indenters. Results are compared to previous models.

Depuis longtemps déjà, on utilise l’essai d’indentation pour caractériser la dureté des matériaux. Il est, en effet, relativement simple à mettre en œuvre et peut être appliqué à des volumes de matière très faibles (nanoindentation). Plus récemment, l’analyse des courbes force / déplacement de l’indenteur dans le solide, enregistrées durant l’essai, ainsi que l’étude morphologique des empreintes et des endommagements générés par la pointe (fissures), ont permis de déterminer d’autres propriétés (ténacité [1], adhérence de revêtements [19], contraintes résiduelles [2]...). Il est cependant difficile d’interpréter les résultats, car l’indentation provoque des champs de contraintes complexes, et l’analyse du problème inverse (c’est-à-dire obtenir les propriétés intrinsèques du matériau à partir d’un essai de dureté) est difficile à résoudre.

Cet article a pour objet la détermination de relations reliant la loi de comportement d’un matériau aux grandeurs mesurées par indentation. On considérera ainsi sa dureté (que l’on identifiera à sa pression moyenne de contact) ainsi que sa courbe d’indentation (c’est-à-dire la relation entre la force appliquée et le déplacement de l’indenteur dans le matériau pendant l’application et le retrait de la charge). Ce problème a déjà été étudié par Sneddon [15] dans le cas de matériaux à comportement élastique et linéaire et par Tabor [16] dans le cas de matériaux rigides parfaitement plastiques. On cherche à généraliser ces résultats à des matériaux aux comportements plus complexes, ainsi qu’à des indenteurs de formes différentes.

Les résultats expérimentaux ont été obtenus avec un nanoindenteur commercialisé par MTS, le NanoIndenter® XP. Des simulations numériques de l'indentation ont également été réalisées afin de balayer un large spectre de lois de comportement, indépendamment de l'existence de tels matériaux.

Présentation du modèle numérique

Le modèle numérique par éléments finis est fondé sur le code de calcul commercial Ansys® 8.1. L'indenteur considéré est axisymétrique, ce qui permet de réduire les temps de calcul et de créer un modèle en 2D. Dans le cas d'un cône, il est caractérisé par son demi-angle au sommet θ .

L'objet de cette étude étant l'interprétation des essais d'indentation classiques (Vickers, Berkovich), il est important de considérer le même régime de déformation du matériau entre ces essais et les simulations. En conséquence, l'angle θ doit être suffisamment important pour ne pas engendrer un régime de coupe du matériau ($\theta < 45^\circ$ [9]). L'indenteur est supposé indéformable et ne présentant pas de frottement avec le matériau. Le matériau est supposé isotrope, homogène et obéit à une loi de comportement bilinéaire (Fig. 1) qui peut-être défini par 3 paramètres :

- le module d'Young E ;
- la limite d'élasticité Y ;
- le module tangent (ou pente d'écrouissage isotrope) E_t .

Son coefficient de Poisson est noté ν .

Le maillage (Fig. 2) est affiné à proximité de la zone de contact. La taille des éléments

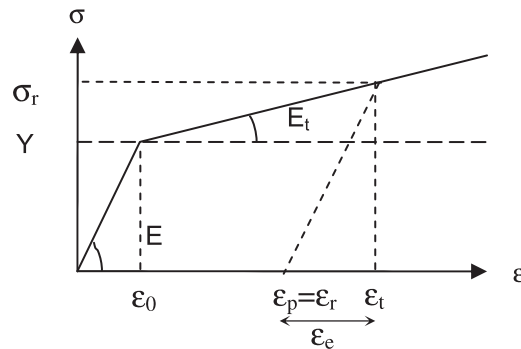


Fig. 1. Loi de comportement du matériau simulé. Une contrainte σ_t impose une déformation totale ϵ_t qui se décompose en déformations élastique ϵ_e et plastique ϵ_p . ϵ_0 est la limite de déformation élastique.

Fig. 1. Material's constitutive behaviour.

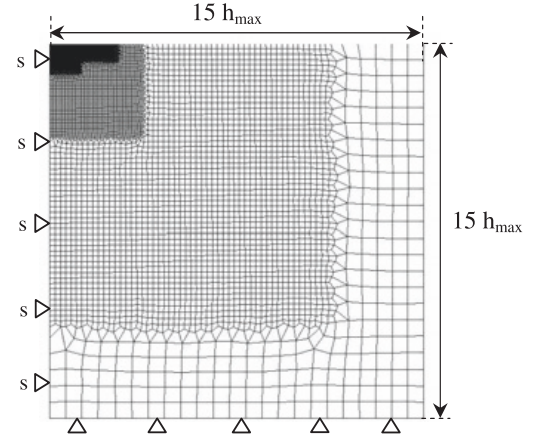


Fig. 2. Maillage utilisé pendant la simulation.

Fig. 2. Numerical mesh.

varie de moins de $h_{\max}/100$ (h_{\max} : déplacement maximal de l'indenteur dans le matériau) au niveau de la zone de contact à moins de h_{\max} sur les bords du matériau. Au total, 12 390 éléments ont été utilisés. Les conditions aux limites sont :

- blocage des déplacements horizontaux du bord gauche du substrat (axisymétrie) ;
- blocage des déplacements verticaux de la base du substrat.

En fonction du déplacement h de l'indenteur dans le matériau, le modèle calcule :

- la force appliquée F , déterminée comme la somme des forces résultantes à la base du matériau ;
- la hauteur de contact h_c , définie comme la différence de hauteur entre la pointe de l'indenteur et le plus haut nœud de la surface du matériau en contact avec l'indenteur ;
- l'aire de contact projetée A_c , correspondant à l'aire de la section de l'indenteur à la hauteur h_c ;
- la pression moyenne de contact pm peut donc être calculée par le rapport :

$$pm = \frac{F}{A_c}. \quad (1)$$

On observe également les champs de contrainte et de déformation sous l'indenteur, ainsi que la forme imposée par l'indenteur à la surface du matériau.

Les résultats de ces simulations ont été validés par comparaison avec des résultats expérimentaux, avec d'autres simulations numériques issues de la littérature, ainsi qu'avec les solutions analytiques de cas simples.

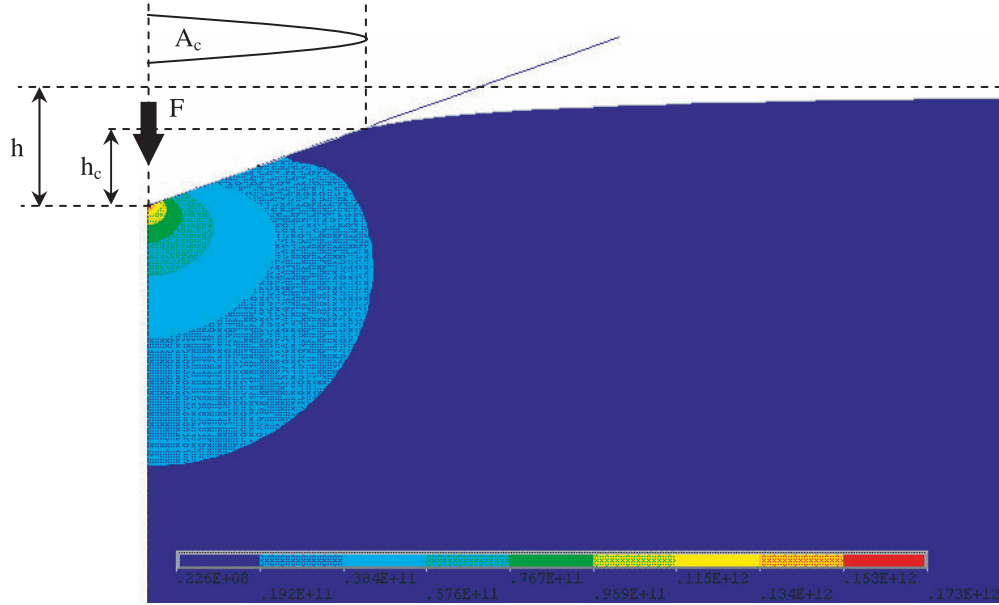


Fig. 3. Observation des contraintes équivalentes de Von Mises à proximité du contact et définition des valeurs calculées par la simulation numérique (matériau élastique, $E = 200$ GPa).

Indentation par une pointe conique

Généralisation de la théorie élastique

Théorie élastique

Considérons l'indentation par un cône parfaitement rigide (qui peut souvent être supposé équivalent à un indenteur pyramidal à base triangulaire (Vickers) ou carrée (Berkovich). Selon Sneddon [15], l'expression de la pression moyenne de contact d'un matériau à élasticité linéaire et isotrope est donnée par :

$$pm_{\text{Sneddon}} = \frac{E}{2(1 - \nu^2)\tan\theta} \cdot \quad (2)$$

Pour prendre en compte la déformation élastique de l'indenteur, cette expression peut se mettre sous la forme :

$$pm_{\text{Sneddon}} = \frac{E_r}{2\tan\theta} \cdot \quad (3)$$

Où E_r est le module réduit du contact, défini par :

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \quad (4)$$

E_i est le module d'Young de l'indenteur, ν_i son coefficient de Poisson.

Ainsi, bien que l'indenteur soit supposé indéformable dans les simulations

numériques, sa rigidité est prise en compte au travers de E_r .

Tabor [16] a également établi une relation (5) pour les matériaux rigides parfaitement plastiques entre cette pression moyenne de contact et la limite d'élasticité :

$$pm_{\text{Tabor}} \approx 3,3 Y \cdot \quad (5)$$

Il n'existe cependant pas de formule équivalente pour la dureté des matériaux élastoplastiques avec écrouissage.

Effet de la plasticité sur la pression moyenne de contact

L'évolution de la pression moyenne de contact dans le matériau indenté est souvent présentée en grandeurs adimensionnelles à partir du rapport $\frac{pm}{Y}$. Cela revient à comparer la pression moyenne de contact exercée sur ce matériau à la pression moyenne de contact qu'il aurait dans l'hypothèse où son comportement serait rigide parfaitement plastique. Nous proposons d'adopter la même démarche, mais en comparant pm_{Sneddon} avec la pression moyenne pm . Pour quantifier l'effet de la plasticité sur la pression moyenne de contact, on utilise le rapport $\frac{pm_{\text{Sneddon}}}{pm}$. Cela revient à considérer que le matériau a un comportement élastique ; la plasticité étant un nouveau facteur à introduire

Tableau 1. Exemples de déformations représentatives utilisées par différents auteurs ϵ_r , ϵ_e et ϵ_p sont définis sur la figure 1.

Table 1. Representative strains considered by other authors.

Auteur	Type de déformation représentative	Valeur de la déformation représentative	Conditions
Tabor [16]	ϵ_p	0,08	Indenteur Vickers
Johnson [8]	ϵ_t	$\frac{0,2}{\tan \theta}$	
Robinson et Shabak [14]	ϵ_p	$\frac{0,4}{\tan \theta}$	
Felder [5]	$\epsilon_t - \epsilon_0$	$\frac{0,3}{\tan \theta}$	
Laval [9]	$\epsilon_t - \epsilon_0$	0,01, $n = 0,3$ 0,06, $n = 0,01$	Pour une loi d'écrouissage $\sigma = Y (\epsilon + \epsilon_0)^n$, calcul par simulation numérique de la déformation moyenne dans la zone plastique sous l'indenteur ($\theta = 68^\circ$)
Giannakopoulos et Suresh [6]	ϵ_p	0,29	Correspond à la limite de déformation de type coupe (la théorie des lignes de glissement doit rester valable). Déterminé à partir de la courbe force déplacement
Bucaille [3]	$\epsilon_t - \epsilon_0$	$\frac{0,087}{\tan \theta} \log\left(\frac{E}{Y \tan \theta}\right)$ $\frac{0,2}{\tan \theta}$	Pour X faible Pour X élevé
Dao et al. [4]	ϵ_p	0,033	Problème traité par analyse dimensionnelle
Notre modèle	ϵ_p	$\frac{\alpha}{\tan \theta}$; $\alpha \approx 0,22$	Cf. section Calcul de la déformation représentative

dans l'équation (3). Plus la plasticité est présente dans le matériau, plus l'écart entre les deux valeurs sera grand.

Quantification de la part de déformation plastique dans le matériau

Pour quantifier la part de déformation plastique par rapport à la déformation élastique mise en jeu dans le contact, Laval [9] utilise l'indice d'indentation défini par :

$$X = \frac{E_r}{Y \tan \theta} . \quad (6)$$

Cet indice dépend des propriétés du matériau, ainsi que de la forme de l'indenteur. Plus précisément, X peut se définir comme le rapport d'une grandeur directement liée à la déformation plastique moyenne imposée par l'indenteur (proportionnelle à $\cotan \theta$), sur la déformation élastique maximale admissible par le matériau indenté en traction ou compression uniaxiale (Y/E). Il ne

permet cependant pas de prendre en compte l'effet de l'écrouissage. Afin de considérer cet écrouissage, nous proposons de remplacer dans cette expression Y par une contrainte équivalente σ_r pour un matériau écroui. Cette contrainte équivalente correspond à une déformation plastique ϵ_r , représentative de l'essai et ne dépendant que de la géométrie de l'indenteur sous la forme :

$$\epsilon_r = \frac{\theta}{\tan \theta} ; \alpha \approx 0,22. \quad (7)$$

D'autres auteurs ont établi, selon plusieurs critères, différentes déformations représentatives qui sont regroupées dans le tableau 1, avec les notations de la figure 1.

La diversité des valeurs de déformations représentatives définies par ces auteurs peut s'expliquer par :

- diversité du choix du paramètre de déformation représentative : déformation totale ($\epsilon_r = \epsilon_t$), déformation plastique

- ($\epsilon_r = \epsilon_p$), déformation au-dessus de la limite d'élasticité ($\epsilon_r = \epsilon_t - \epsilon_0$) ;
- géométrie de l'indenteur étudié (cônes ou des pyramides : les effets des arêtes peuvent modifier la déformation moyenne) ;
 - prise en compte de la surface réelle du contact par rapport à celle de l'empreinte résiduelle ;
 - type d'écrouissage ;
 - problème traité : relation des propriétés du matériau avec les courbes $F = f(h)$ ou avec la pression de contact...

La contrainte σ_r est la valeur de la contrainte sur la loi de comportement en traction uniaxiale correspondant à une déformation plastique ϵ_r (Fig. 1).

Ainsi :
$$\sigma_r = Y + \frac{\epsilon_r}{\frac{1}{E_r} - \frac{1}{E}} \quad (8)$$

Notre nouvel indice d'indentation devient donc

$$X' = \frac{E_r}{\sigma_r \tan \theta} \quad (9)$$

Pour un matériau au comportement purement élastique, on a $X' = 0$, et plus X' est grand, plus le matériau a globalement un comportement plastique.

Expression de la pression moyenne de contact

Les deux grandeurs adimensionnelles $\left(\frac{pm_{Sneddon}}{pm} \text{ et } X'\right)$ sont obtenues en utilisant une simulation numérique de l'indentation. Plus de 40 simulations ont été réalisées, avec différentes valeurs de module d'Young E , de limite d'élasticité Y , de pente d'écrouissage E_t et d'angle θ , telles que l'indice d'indentation X' s'étende de 0 (matériau élastique) à plus de 3000, ce qui permet d'étudier un large spectre de comportements. En traçant $\frac{pm_{Sneddon}}{pm}$ en fonction de l'indice d'indentation X' (Fig. 4), on observe une bonne linéarité entre ces deux paramètres.

L'ordonnée à l'origine égale à 1 correspond bien à un matériau élastique : $pm = pm_{Sneddon}$. On obtient donc une relation du type :

$$\frac{pm_{Sneddon}}{pm} = \beta X' + 1 \quad \text{avec } \beta \approx 0,1428. \quad (10)$$

On peut donc généraliser l'expression de la pression moyenne de contact établie par

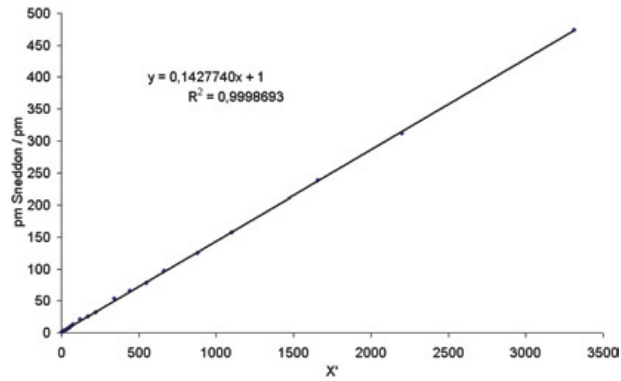


Fig. 4. Relation entre le rapport de la pression moyenne de contact à la pression moyenne de contact élastique et l'indice d'indentation X' pour différents matériaux et angles d'indenteurs.

Fig. 4. Ratio of the mean contact pressure to the elastic mean contact pressure as a function of the indentation index X' .

Sneddon à :

$$pm = \frac{E_r}{2(\beta X' + 1) \tan \theta} \quad (11)$$

On vérifie que cette solution tend également vers celle donnée par Tabor pour un matériau rigide parfaitement plastique. Soit un matériau plastique : X' élevé $\rightarrow \beta X' \gg 1$. L'expression devient :

$$pm = \frac{E_r}{2\beta X' \tan \theta}$$

En remplaçant X' par $\frac{E_r}{\sigma_r \tan \theta}$, on obtient :

$$pm = \frac{1}{2\beta} \sigma_r \quad (12)$$

La proportionnalité entre la dureté et la limite d'élasticité d'un matériau parfaitement plastique est vérifiée en calculant σ_r avec une pente d'écrouissage nulle : $\sigma_r = Y$.

D'où
$$pm = \frac{1}{2\beta} Y. \quad (13)$$

Pour $\beta \approx 0,1428$ (issu de la linéarisation), on calcule $pm \approx 3,5Y$. Cette valeur, même si elle est un peu élevée, reste acceptable, et proche des résultats expérimentaux établis par Tabor ([16], p. 107) sur des métaux écrouis où $pm \approx 3,3Y$.

Calcul de la déformation représentative

La déformation représentative ϵ_r a été choisie comme la partie plastique de la déformation totale ($\epsilon_r = \epsilon_p = \epsilon_t - \epsilon_e$) sur la courbe de la loi de comportement de la figure 1. En effet, la déformation plastique est confinée dans un volume restreint sous le contact,

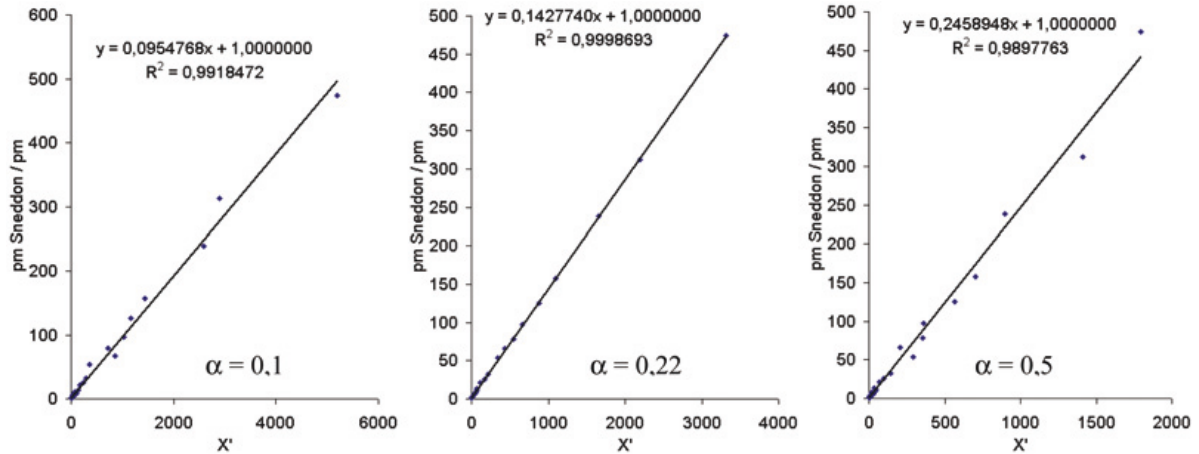


Fig. 5. Relation entre le rapport de la pression moyenne de contact à la pression moyenne de contact élastique et l'indice d'indentation X' , calculé pour différentes valeurs de α (de gauche à droite : 0,1 0,22 0,5).

Fig. 5. Relation between the ratio $pm/pm_{Sneddon}$ as a function of X' for different values of α (left to right: 0.1 0.22 0.5).

tandis que la déformation élastique est libre de s'étendre beaucoup plus largement sous l'indenteur. La déformation plastique apparaît alors comme plus critique que la déformation élastique.

Le facteur α intervenant dans la déformation représentative a été ajusté afin de donner à la courbe de la figure 4 une meilleure linéarité. La figure 5 illustre cette linéarisation avec différentes valeurs de α . On trouve ainsi $\alpha \approx 0,22$.

En assimilant l'indenteur Vickers à son cône équivalent en terme de volume d'angle $70,3^\circ$, on trouve $\epsilon_r = \frac{\alpha}{\tan \theta} = 7,88 \%$. Ceci correspond bien à la valeur de déformation représentative donnée par Tabor [16] pour un indenteur Vickers : $\epsilon_r \approx 8 \%$.

Pour valider une nouvelle fois la valeur de $\alpha = 0,22$, on peut utiliser les formules (11), (9), (8) et (7) pour recalculer respectivement X' , σ_r , ϵ_r puis α , à partir de la pression moyenne de contact déterminée par simulation numérique et de la loi de comportement du matériau considéré. Tous calculs faits, on obtient la variation de α en fonction de X' de la figure 6.

On observe que pour des indices d'indentation suffisamment grands, c'est-à-dire quand le phénomène de plasticité (et donc aussi l'écroutissage) devient prépondérant, on retrouve bien une valeur $\alpha = 0,22$. Pour X' plus faible, l'écroutissage n'a que peu d'impact sur la pression moyenne de contact, et la détermination de α par cette méthode conduit à des valeurs qui ne sont plus significatives et dont la marge d'erreur est importante.

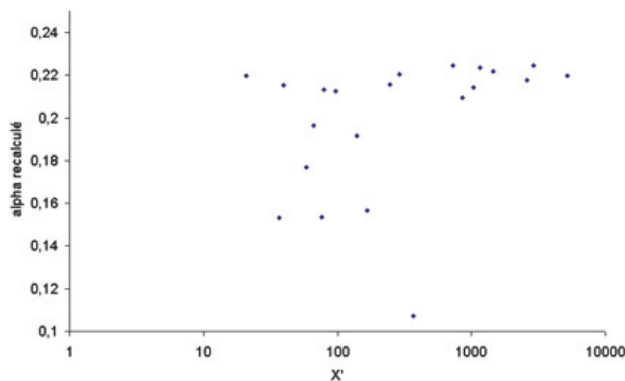


Fig. 6. Vérification de la validité de la valeur de α . Les données pour $X' < 10$ n'apparaissent pas : elles ne donnent pas de valeurs significatives.

Fig. 6. Validation of α for $X' > 10$.

Comparaison de nos résultats avec différents travaux antérieurs

Nous allons comparer la valeur de pression moyenne de contact obtenue à partir de nos expressions avec celle de différents auteurs.

Modélisation de l'indentation d'un matériau élastique

On rappelle que pour un indenteur conique et un matériau en régime élastique linéaire, la pression moyenne de contact s'exprime par la relation (3). Ce modèle fut développé, entre autres, par Hertz, Boussinesq, puis Sneddon. Il a été validé à de nombreuses reprises, ainsi ...

Modélisation de l'indentation pour un matériau rigide parfaitement plastique

Le comportement pendant l'indentation d'un matériau rigide parfaitement plastique a été étudié au moyen de la théorie des lignes de glissement, d'abord par Prandtl, puis généralisé par Hill et al. [7]. Dans ces modèles, seule la plasticité est prise en compte : pas l'élasticité ou l'écrouissage. Yu et Blanchard [18] ont repris ces résultats présentés à l'origine sous forme tabulée et ils ont proposé comme solution les expressions suivantes : Pour $\theta > 52,5^\circ$:

$$pm_{\text{parfplast}} = C_\beta Y, \quad (14)$$

où $C_\beta = \xi(2,845 - 2,3757 \times 10^{-2} (90 - \theta))$,

$\xi = 1$ pour un critère de plasticité de Tresca

$\xi = \frac{2}{\sqrt{3}}$ pour un critère de plasticité de Von

Mises (ce qui est notre cas).

L'expression de Tabor (5) constitue donc une version simplifiée de ces équations.

Modèles élastique parfaitement plastique

En considérant le modèle de l'expansion d'une cavité sphérique dans un solide élastique parfaitement plastique de dimensions infinies donné par la théorie de Hill, Johnson [8] a établi pour des matériaux présentant de l'élasticité et de la plasticité parfaite que la pression moyenne de contact s'écrit :

$$pm_{\text{Johnson}} = \frac{2Y}{3} \left[1 + \ln \left(\frac{E_r}{3Y \tan \theta} \right) \right]. \quad (16)$$

Perrot [12] propose une expression un peu différente de cette pression moyenne de contact :

$$pm_{\text{Perrot}} = Y \left[0,494 + 0,577 \ln \left(\frac{E_r}{Y \tan \theta} \right) \right]. \quad (17)$$

Cette expression tient compte de la présence d'une surface libre à la surface du matériau.

Quant à Marsh [10], il obtient l'expression suivante :

$$pm_{\text{Marsh}} = Y \left[0,28 + 0,6 \ln \left[\frac{3}{3 - \lambda} \ln \left(\frac{3}{\lambda + 3\mu - \lambda\mu} \right) \right] \right] \quad (18)$$

$$\text{où } \lambda = (1 - 2\nu) \frac{Y}{E} \text{ et } \mu = (1 + \nu) \frac{Y}{E}.$$

Yu et Blanchard [18] ont également développé un modèle intermédiaire entre le modèle élastique et le modèle rigide parfaitement plastique. La zone située sous le contact entre l'indenteur et le matériau subit une pression semblable à celle du modèle rigide parfaitement plastique, alors que la zone en dehors du contact subit une déformation élastique. Ce qui donne :

$$pm_{Yu} = \frac{C_m Y}{\tan \theta} \tanh \left(\frac{C_\beta \tan \theta}{C_m} \right) \quad (19)$$

$$\text{où } C_m = \frac{E_r}{2Y}$$

$$C_\beta = \lambda(2,845 - 2,3757 \times 10^{-2} (90 - \theta)).$$

Les figures 7–9 comparent les résultats obtenus par simulation numérique avec ces différents modèles au travers des équations (3, 5), (15–18). La figure 8 présente ces résultats en fonction de l'indice d'indentation, tandis que la figure 9 les présente en fonction de la capacité du matériau à s'écrouir, caractérisée par le rapport E_t/E . On observe un comportement majoritairement déterminé par l'élasticité du matériau pour $X' < 1$ et par la plasticité pour $X' > 10$.

- Pour $X' > 10$, le modèle de Perrot [12] donne les résultats le plus en accord avec la pression moyenne de contact déterminée par la simulation numérique. Les autres (hormis le modèle élastique) donnent des résultats acceptables ;
- Pour $X' < 1$, on voit que la théorie de l'élasticité correspond parfaitement à nos résultats. Le modèle de Yu et Blanchard [18] est le seul autre modèle à rester valable également dans cette partie.

La figure 9 montre qu'aucun des modèles ne prend en compte l'écrouissage.

Error made using the different expressions of the mean contact pressure compared to the simulation's results as a function of the indentation index X' .

De nos résultats de simulation numérique, nous avons établi l'expression (11). Sur les figures 7–9 nous avons également représenté la correspondance entre les résultats de la simulation numérique et cette équation (11) de la pression moyenne de contact. Nous constatons un accord excellent. Contrairement aux équations de la littérature, cette équation est capable de prendre en compte l'effet d'écrouissage.

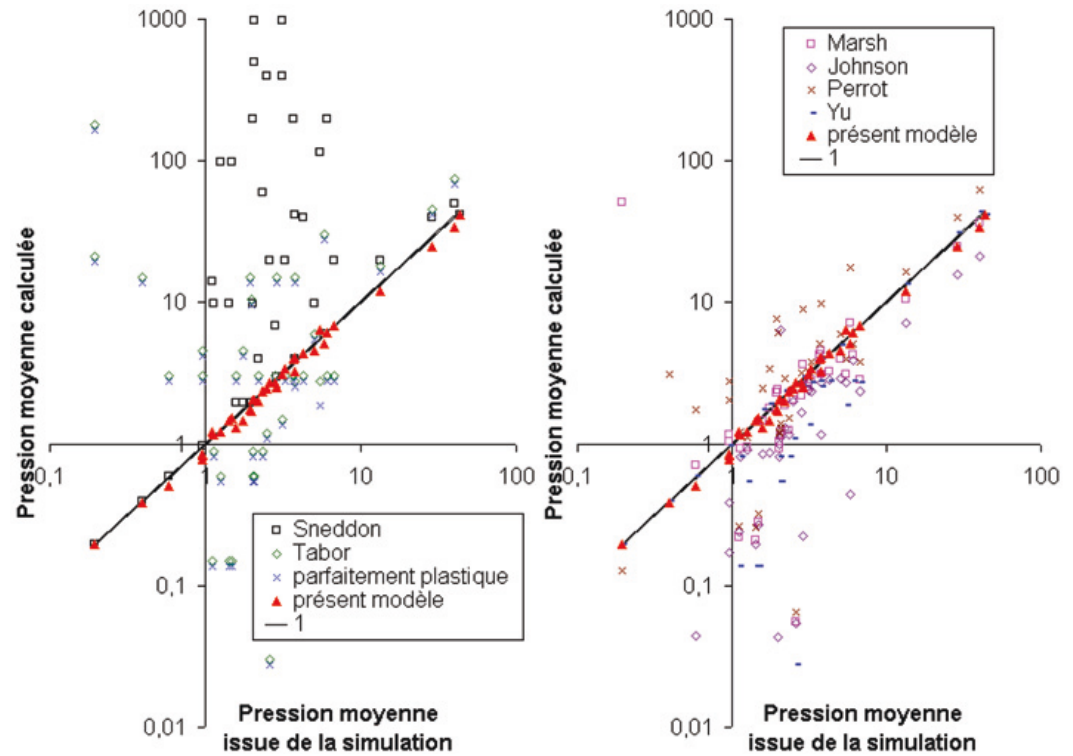


Fig. 7. Représentation de la pression moyenne de contact calculée selon les différents modèles en fonction de la pression moyenne déterminée par la simulation numérique pour différentes grandeurs rhéologiques des matériaux (domaine de variation des grandeurs : cf. texte).

Fig. 7. Mean contact pressure calculated by different authors as a function of the numerical simulation's results.

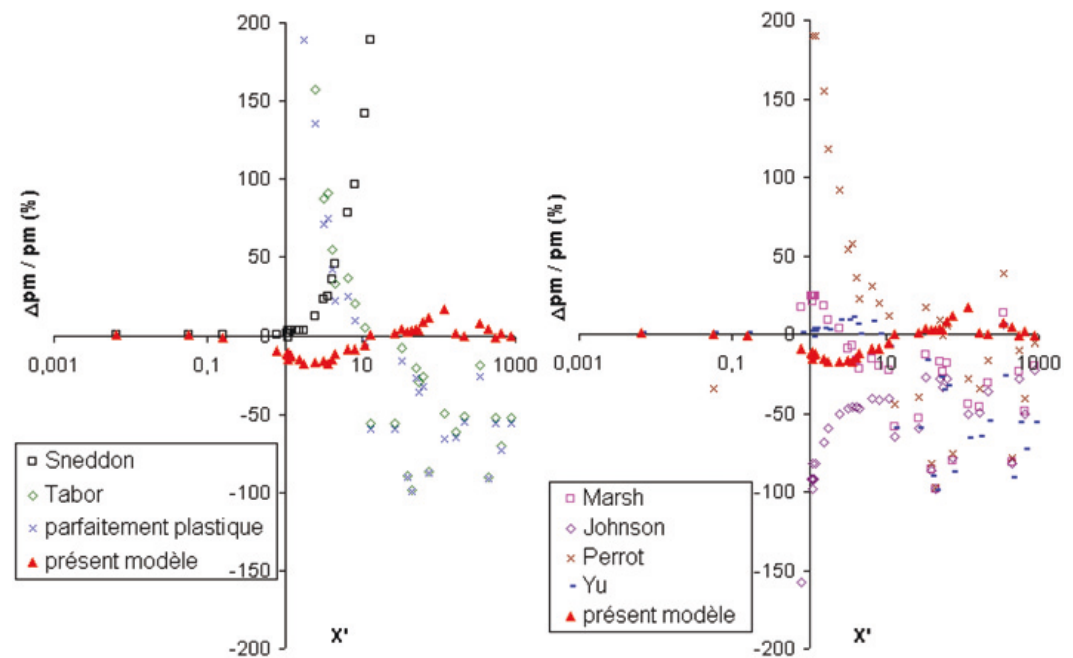


Fig. 8. Écart relatif entre les valeurs de la pression moyenne de contact calculée au moyen des différents modèles et les valeurs de la pression moyenne de contact déterminée par la simulation numérique en fonction de l'indice d'indentation X' ($\Delta pm/pm = (pm_{calcul} - pm_{simulation})/pm_{simulation}$).

Fig. 8. Error made using the different expressions of the mean contact pressure compared to the simulation's results as a function of the indentation index X' .

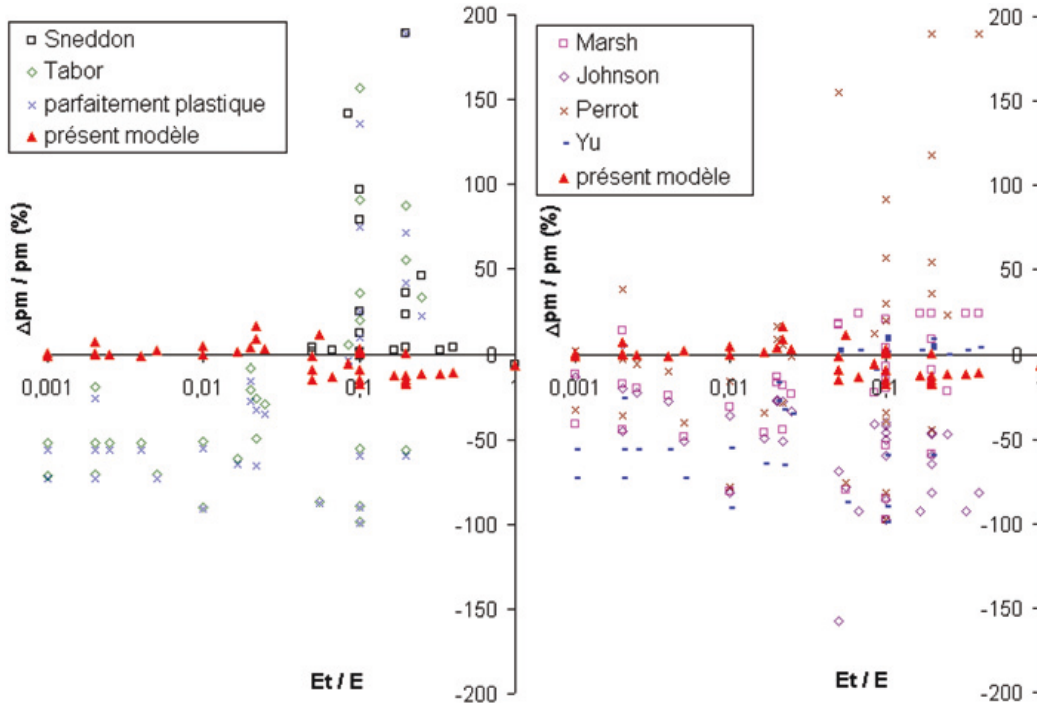


Fig. 9. Écarts relatifs entre les valeurs de la pression moyenne de contact calculée au moyen des différents modèles et les valeurs de la pression moyenne de contact déterminée par la simulation numérique en fonction de la capacité du matériau à s'écrouir.

Fig. 9. Error made using the different expressions of the mean contact pressure compared to the simulation's results as a function of the strain hardening.

Corrélations avec la courbe d'indentation

Nous nous sommes attachés, au paragraphe 3, à établir une relation entre la pression moyenne de contact et les propriétés du matériau étudié. Si la pression moyenne de contact peut être assimilée à la dureté du matériau, sa détermination expérimentale au moyen de la méthode d'Oliver et Pharr [11], par exemple, peut générer des erreurs. Il est donc important de pouvoir relier ce qui est directement mesuré aux propriétés que l'on souhaite déterminer. Pour cela, la détermination précise de l'aire de contact est nécessaire.

Facteur de forme

Définition du facteur de forme

La forme que prend la surface du matériau sous l'indenteur est importante à déterminer. En effet, il peut s'affaisser ou bien former des bourrelets sur les côtés (Fig. 10). Cela a une influence sur la hauteur du contact h_c entre l'indenteur et le matériau, et donc sur l'aire de contact A_c .

Ces différents comportements peuvent être pris en considération en introduisant le facteur de forme c^2 défini par :

$$h_c = c^2 h. \quad (19)$$

Il y aura un affaissement du matériau sur les bords de l'indenteur si c^2 est inférieur à 1 et formation d'un bourrelet dans le cas contraire. Ce facteur de forme c^2 a été mis en relation empiriquement avec l'indice

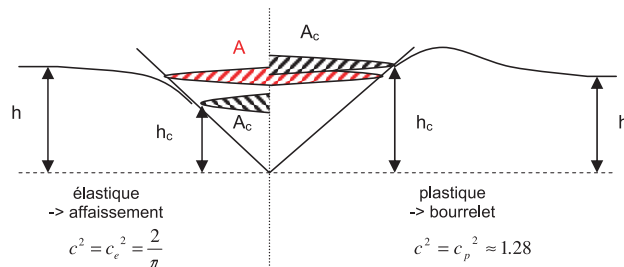


Fig. 10. Représentation de la déformation du matériau sous l'indenteur : à gauche, un matériau élastique qui s'affaisse ; à droite, formation de bourrelets pour un matériau plastique.

Fig. 10. Deformation of the material under the indenter: sinking-in for elastic materials on the left; piling-up for plastic materials on the right.

d'indentation X , entre autres par Ramond-Angelelis [13] pour des matériaux élastique parfaitement plastiques. Pour X très faible (matériau élastique), $c^2 = c_e^2 = \frac{2}{\pi}$ (affaissement), alors que pour X élevé (matériau au comportement majoritairement plastique), $c^2 = c_p^2 \approx 4,28$. Pour X moyen, c^2 est compris entre ces deux valeurs.

Séparation des composantes élastique et plastique

L'expression (6) de la pression moyenne de contact peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{pm} = \frac{1}{pm_e} + \frac{1}{pm_p} \quad (20)$$

où $pm_e = \frac{E_r}{2 \tan \theta}$ est la pression moyenne de contact d'un matériau élastique qui aurait même module réduit E_r que le matériau considéré (pm_e correspond au $pm_{Sneddon}$ défini par (3)) et $pm_p = \frac{\sigma_r}{2\beta}$ est la pression moyenne de contact d'un matériau rigide plastique qui aurait la même contrainte caractéristique σ_r que le matériau considéré.

En appliquant une charge F à chacun de ces matériaux virtuels à l'aide de l'indenteur, on créerait les aires de contact entre l'indenteur et les matériaux A_{ce} et A_{cp} , telles que :

$$A_{ce} = \frac{F}{pm_e}$$

$$A_{cp} = \frac{F}{pm_p}$$

En imposant la même charge F au matériau réel, on crée l'aire de contact A_c :

$$A_c = \frac{F}{pm}$$

On obtient une relation entre les aires de contact de ces matériaux à partir de l'expression (20) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{pm_e} + \frac{1}{pm_p} &= \frac{A_{ce}}{F} + \frac{A_{cp}}{F} \\ \frac{1}{pm} &= \frac{A_c}{F} \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad A_c = A_{ce} + A_{cp} \quad (21)$$

L'aire de contact totale est donc la somme des aires de contact dues à l'élasticité et à la plasticité. La déformation plastique est majoritairement confinée sous l'indenteur, alors que la déformation élastique a lieu dans

le reste du matériau, donnant ainsi lieu à deux aires de contact distinctes. Cette représentation n'est que schématique et n'influence en rien le raisonnement qui suit.

Calcul du facteur de forme

Le facteur de forme c^2 est habituellement défini comme un rapport de hauteurs, mais on peut aussi le définir par une expression équivalente (pour les indenteurs auto-similaires parfaits) en fonction d'un rapport de surfaces :

$c^2 = \frac{h_c}{h}$, soit $c^4 = \frac{A_c}{A}$, où A est l'aire de la section de l'indenteur correspondant à l'enfoncement de l'indenteur h et A_c celle correspondant à la section à la hauteur de contact h_c . On sépare ainsi les contributions à la surface de contact entre celle due à l'élasticité et celle due à la plasticité. On suppose que pour un matériau élastique, $A_{ce} = c_e^4 A_e$ et pour un matériau rigide plastique $A_{cp} = c_p^4 A_p$. On obtient :

$$c^4 = \frac{A_c}{A} = \frac{A_{ce} + A_{cp}}{A_e + A_p} = \frac{\frac{A_{ce}}{c_e^4} + \frac{A_{cp}}{c_p^4}}{\frac{A_e}{c_e^4} + \frac{A_p}{c_p^4}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{F}{pm_e} + \frac{F}{pm_p}}{\frac{F}{pm_e} + \frac{F}{pm_p}} \\ &= \frac{\frac{F}{pm_e} + \frac{F}{pm_p}}{\frac{F}{pm_e} + \frac{F}{pm_p}} \end{aligned}$$

$$\text{Soit :} \quad c^4 = \frac{1 + \frac{pm_e}{pm_p}}{\frac{1}{c_e^4} + \frac{pm_e}{c_p^4}}$$

L'association des expressions (20) et (10)

donne $\frac{pm_e}{pm_p} = \beta X'$.

Et finalement :

$$c^2 = \sqrt{\frac{\beta X' + 1}{\frac{\beta X'}{c_e^4} + \frac{1}{c_p^4}}} \quad (22)$$

On vérifie bien que si X' est nul, c^2 vaut c_e^2 , et s'il tend vers $+\infty$, c^2 tend vers c_p^2 .

Ramond-Angelelis [13] a effectué une approximation linéaire par parties de la courbe représentant la variation du facteur de forme c^2 avec $\log X$, pour des matériaux élastiques parfaitement plastiques. En

superposant à cette courbe la variation de c^2 en fonction de X' déterminée par l'expression (22), on trouve une bonne correspondance des courbes entre elles (courbes bleues, Fig. 11). Prendre en compte la déformation représentative ε_r dans X' permet d'étendre les approximations de Ramond-Angelalis à des matériaux pouvant s'écrouir.

La figure 11 montre ces résultats pour un coefficient de frottement de Tresca nul et valant 1. Le frottement semble juste diminuer la valeur de c_p^2 utilisée dans l'expression (22), qui passe de $\approx 1,28$ sans frottement ($m = 0$) à $\approx 1,18$ avec un coefficient de frottement $m = 1$. Les autres valeurs n'ont pas besoin d'être modifiées (c_e^2 vaut toujours $2/\pi$) pour rester en accord avec Ramond-Angelalis. Le frottement entraîne donc une limitation de la hauteur maximale de bourrelet.

Courbe de charge

Pour un indenteur conique parfait, la courbe de charge peut-être représentée par $P = \alpha_c h^2$, où α_c est une constante, comme le montre la figure 12.

D'après la définition de la pression moyenne de contact, la charge peut s'écrire :

$$F = pm \cdot A_c = pm \cdot c^4 \cdot A.$$

Soit pour un cône :

$$F = pm \cdot c^4 \cdot h^2 \cdot \tan^2 \theta.$$

En plaçant dans cette relation les expressions (10) et (22) de pm et de c^4 , on obtient :

$$F = \frac{\pi}{2} \frac{E_r \tan \theta}{\beta X' + 1} \frac{\beta X' + 1}{\frac{c_p^4}{c_e^4} + \frac{1}{c_e^4}} h^2 = \frac{\pi}{2} \frac{E_r \tan \theta}{\frac{\beta X'}{c_p^4} + \frac{1}{c_e^4}} h^2 \quad (23)$$

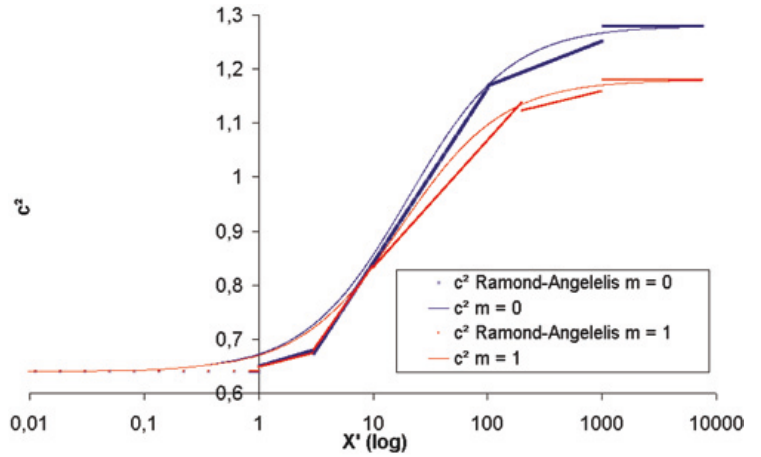


Fig. 11. Correspondance entre les valeurs approchées du facteur de forme par Ramond-Angelalis [13] et celles calculées par l'expression (22). Pour un coefficient de frottement m de 0 et 1.

Fig. 11. c^2 fitted by Ramond-Angelalis and calculated by (22) as a function of the indentation index for a friction coefficient of 0 and 1.

Soit

$$\alpha_c = \frac{\pi}{2} \frac{E_r \tan \theta}{\frac{\beta X'}{c_p^4} + \frac{1}{c_e^4}}.$$

Courbe de décharge (1^{re} moitié : F variant de F_{\max} à $F_{\max}/2$)

Le modèle d'Oliver et Pharr représente la courbe de décharge sous la forme $F = K(h - h_f)^m$, avec K , h_f et m constantes. Ceci correspond à un décalage h_f de l'enfoncement de l'indenteur par rapport à la courbe de charge (plus ou moins la hauteur de l'empreinte résiduelle) et une loi puissance d'exposant m qui n'a pas vraiment de signification physique. En traçant les courbes $F = f(h^2)$ pour des données expérimentales ou issues de la

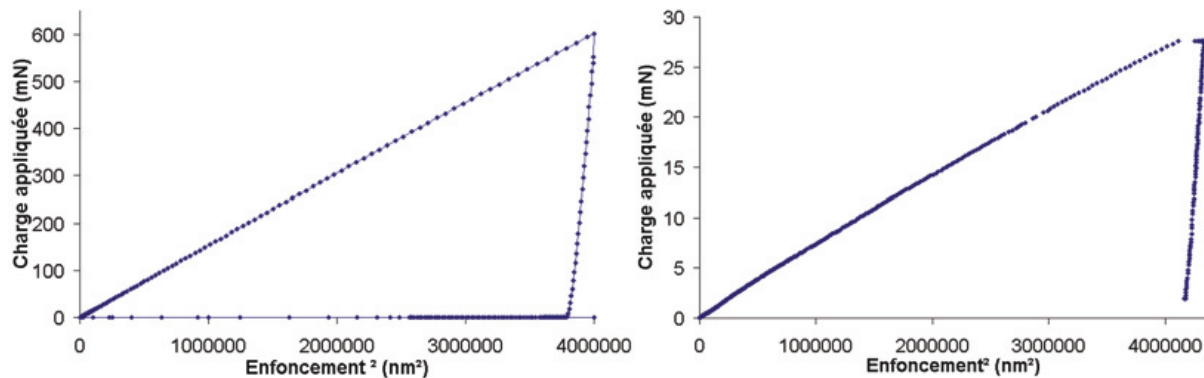


Fig. 12. Courbes de la charge appliquée en fonction du carré de l'enfoncement de l'indenteur par simulation numérique (indenteur conique, $E = 1000$ GPa, $Y = 1$ GPa, $E_t = 10$ GPa, à gauche) et expérimentalement (indenteur Berkovich, aluminium, à droite).

Fig. 12. Load applied as a function of the square of the indenter's displacement for numerical simulation data (left) and experimental data (aluminium, right).

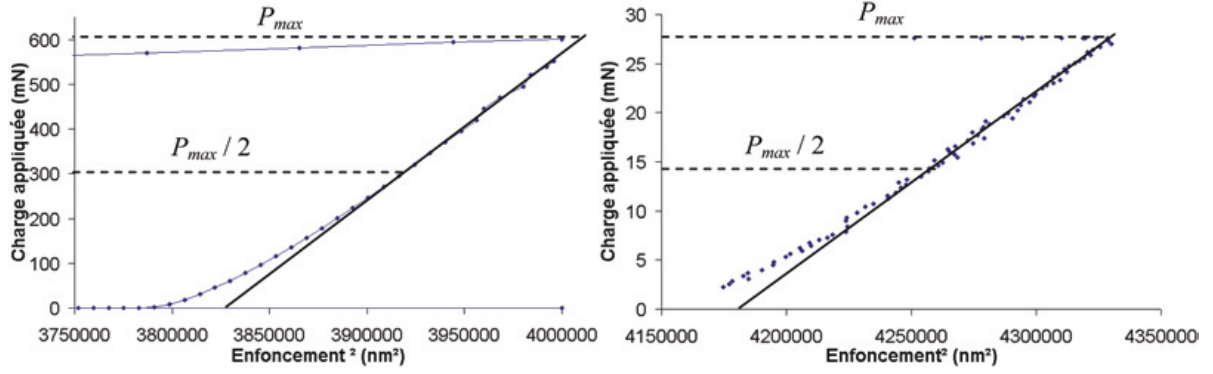


Fig. 13. Courbes de la charge appliquée en fonction du carré de l'enfoncement de l'indenteur par simulation numérique ($E=1000$ GPa, $Y=1$ GPa, $E_t=10$ GPa, à gauche) et expérimentalement (aluminium, à droite), pendant la décharge.

Fig. 13. Load applied as a function of the square of the indenter's displacement for numerical simulation data (left) and experimental data (aluminium, right) during unloading.

simulation numérique, on montre que pendant la première moitié de la décharge (quand la charge varie de F_{\max} à $F_{\max}/2$), elle peut être mieux représentée par une loi puissance d'exposant 2 avec un décalage de charge F_0 (cf. Fig. 13) :

$$F = \alpha_d h^2 + F_0.$$

On suppose que la décharge, dans cette partie, se déroule de manière totalement élastique. La pression moyenne de contact élastique peut alors s'écrire en tenant compte du décalage de force F_0 :

$$pm_{\text{Sneddon}} = \frac{F - F_0}{A_c} = \frac{F - F_0}{\pi \tan^2 \theta h_c^2}$$

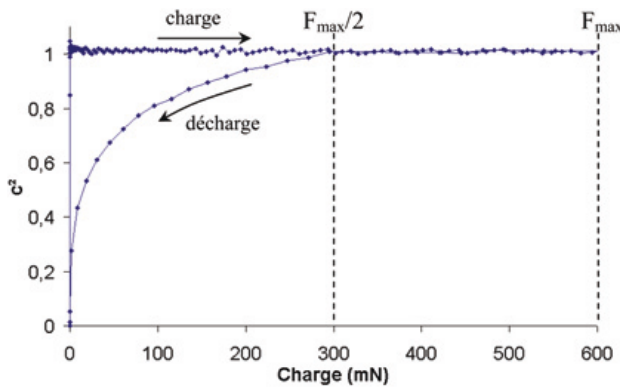


Fig. 14. Variation de c^2 avec la charge appliquée pendant la charge et la décharge pour un matériau élastoplastique ($E=1000$ GPa, $Y=1$ GPa, $E_t=2$ GPa) par simulation numérique.

Fig. 14. Variation of c^2 with the load for an elastoplastic material during loading and unloading.

$$\text{soit } F = \frac{\pi}{2} E_r \tan \theta c^4 h^2 + F_0.$$

On montre également, avec des résultats de simulation numérique (Fig. 14), que, pendant la première moitié de la décharge (de F_{\max} à $F_{\max}/2$), le facteur de forme c^2 reste constant et identique à celui de la charge (Eq. (22)) :

$$F = \frac{\pi}{2} E_r \tan \theta \frac{\beta X' + 1}{\frac{\beta X'}{c_p^4} + \frac{1}{c_e^4}} h^2 + F_0. \quad (24)$$

$$\text{Donc } \alpha_d = \frac{\pi}{2} E_r \tan \theta \frac{\beta X' + 1}{\frac{\beta X'}{c_p^4} + \frac{1}{c_e^4}}.$$

On peut enfin calculer F_0 en se plaçant à l'enfoncement maximal h_{\max} où $F_{\text{charge}} = F_{\text{décharge}} = F_{\max}$. On obtient alors $F_0 = \beta X' F_{\max}$.

Finalement, la première moitié de la courbe de décharge peut être représentée par l'expression :

$$F = \frac{\pi}{2} E_r \tan \theta \frac{\beta X' + 1}{\frac{\beta X'}{c_p^4} + \frac{1}{c_e^4}} h^2 + \beta X' F_{\max}. \quad (25)$$

Adaptation des expressions à d'autres indenteurs axisymétriques

Les expressions (11), (22), (23) et (25) permettent de déterminer, à partir de la loi de comportement du matériau étudié, la pression moyenne de contact, le facteur de forme, la courbe de chargement et la première moitié

de la courbe de décharge pour un indenteur conique parfait. Expérimentalement, les indenteurs ne sont pas parfaits et présentent souvent une extrémité émoussée. De plus, un indenteur conique est un indenteur auto-similaire, c'est-à-dire qu'il impose une déformation représentative constante. Si on cherche à déterminer la loi de comportement d'un matériau, il est nécessaire de considérer la réponse de ce matériau pour différentes déformations représentatives imposées. Plus d'informations sur les matériaux étudiés pourront ainsi être obtenues en adaptant les expressions précédentes à d'autres types d'indenteurs axisymétriques. Pour cela, on suppose connues :

- les propriétés mécaniques du matériau :
 E , son module d'Young
 ν , son coefficient de Poisson
 Y , sa limite d'élasticité
 E_t , sa pente d'écrouissage
- les propriétés mécaniques de l'indenteur :
 E_i , son module d'Young
 ν_i , son coefficient de Poisson

L'expression (3) de calculer le module réduit E_r .

- la forme de l'indenteur :

Elle peut être obtenue, par exemple, par l'étalonnage de la fonction d'aire selon la méthode d'Oliver et Pharr :

$$A_c = \sum_{i=0}^8 \alpha_i h_c^{1/2^{i-1}}. \quad (26)$$

On peut en déduire le rayon de contact

$$a_c = f(h_c) = \sqrt{\frac{A_c}{\pi}}. \quad (27)$$

On définit deux angles θ et θ_{diff} permettant de caractériser l'indenteur (voir la Fig. 15).

L'angle θ correspond à un cône ayant même rayon de contact a_c à h_c et se calcule par :

$$\tan \theta = \frac{a_c}{h_c}. \quad (28)$$

L'angle θ_{diff} correspond à l'angle de la tangente à l'indenteur à h_c (angle d'attaque) :

$$\tan \theta_{\text{diff}} = \frac{da}{dh_{h=h_c}}. \quad (29)$$

En effet, la géométrie de la partie de l'indenteur qui n'est pas en contact avec le matériau n'a aucune influence sur les mesures. Pour utiliser les expressions précédemment établies, on considère que sa forme est celle d'un cône ayant le même demi-angle que le plus haut point de contact : θ_{diff} . Expérimentalement, θ_{diff} peut être calculé en différenciant le rayon de contact (27) déduit de la fonction

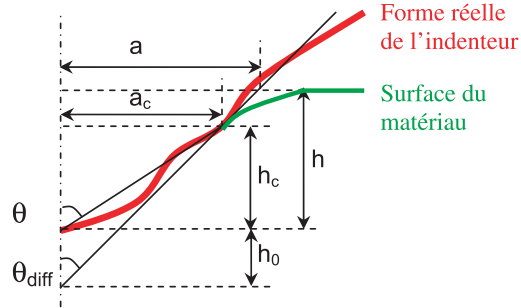


Fig. 15. Définition de deux angles permettant de caractériser l'indenteur.

Fig. 15. Definition of two angles to characterize the indenter.

d'aire (26). Pour un indenteur conique parfait, $\theta = \theta_{\text{diff}}$. Les relations qui suivent restent donc valables.

Le facteur de forme c^2 est défini comme la racine carrée du rapport de l'aire de contact A_c sur l'aire A du cône de demi-angle au sommet θ_{diff} à une hauteur $h + h_0$, h_0 étant la différence de hauteur entre les cônes de demi-angles θ et θ_{diff} , tel que défini sur la figure 15. On calcule :

$$a_c = (h_c + h_0) \tan \theta_{\text{diff}} = h_c \tan \theta,$$

$$\text{soit } h_0 = h_c \left(\frac{\tan \theta}{\tan \theta_{\text{diff}}} - 1 \right)$$

$$a = (h + h_0) \tan \theta_{\text{diff}}$$

$$c^2 = \sqrt{\frac{A_c}{A}} = \frac{a_c}{a} = \frac{h_c \tan \theta}{(h + h_0) \tan \theta_{\text{diff}}},$$

$$\text{soit } c^2 = \frac{1}{\frac{\tan \theta_{\text{diff}}}{\tan \theta} \left(\frac{h}{h_c} - 1 \right) + 1}. \quad (30)$$

Courbe de chargement

La variable utilisée pour le calcul est h_c , qui varie de 0 à h_{cmax} . Les relations correspondant au cône sont adaptées en conservant θ pour déterminer l'aire de contact et en le remplaçant par θ_{diff} quand on considère l'angle d'attaque. On définit ainsi pour chaque valeur de hauteur de contact :

- la déformation représentative :

$$\varepsilon_r(h_c) = \frac{\alpha}{\tan \theta_{\text{diff}}}, \quad \alpha \approx 0,22$$

- la contrainte représentative :

$$\sigma_r(h_c) = Y + \frac{\varepsilon_r}{\frac{1}{E_r} - \frac{1}{E}}$$

- l'indice d'indentation :

$$X'(h_c) = \frac{E_r}{\sigma_r \tan \theta_{\text{diff}}}$$

- la pression moyenne de contact :

$$pm(h_c) = \frac{E_r}{2(\beta X' + 1) \tan \theta_{\text{diff}}}$$

- le facteur de forme (correspondant à un rapport d'aires et non pas de hauteurs) :

$$c^4(h_c) = \frac{\beta X' + 1}{\frac{\beta X'}{c_p^4} + \frac{1}{c_e^4}},$$

avec $c_p^2 \approx 1,28$ et $c_e^2 = \frac{2}{\pi}$

- le déplacement de l'indenteur :

$$h(h_c) = h_c \left[\frac{\tan \theta}{\tan \theta_{\text{diff}}} \left(\frac{1}{c^2} - 1 \right) + 1 \right]$$

- la charge appliquée :

$$F(h_c) = \pi pm h_c^2 \tan^2 \theta.$$

Cette dernière expression provient de la définition de la pression moyenne de contact (.....).

On obtient ainsi la courbe de chargement.

Courbe de décharge

Pour pouvoir tracer la première partie de la courbe de décharge (de F_{max} à $F_{\text{max}}/2$), on calcule trois valeurs à partir des résultats obtenus à la fin du chargement :

$$c_{\text{final}}^4 = c^4(h_c = h_{\text{cmax}})$$

$$F_{\text{max}} = F(h_c = h_{\text{cmax}})$$

$$X'_{\text{final}} = X'(h_c = h_{\text{cmax}}).$$

De la même façon que pour la charge, on définit les valeurs associées suivantes :

- la pression moyenne de contact élastique :

$$pm_e(h_c) = \frac{E_c}{2 \tan \theta_{\text{diff}}}.$$

On suppose en effet que la décharge s'effectue élastiquement, avec un facteur de forme constant.

- le déplacement de l'indenteur :

$$h(h_c) = h_c \left[\frac{\tan \theta}{\tan \theta_{\text{diff}}} \left(\frac{1}{c_{\text{final}}^2} - 1 \right) + 1 \right] \quad (18)$$

la charge appliquée :

$$F(h_c) = \pi \tan^2 \theta h_c^2 pm_e + F_0,$$

avec $F_0 = -\beta F_{\text{max}} X'_{\text{final}}.$ (19)

Tableau 2. Coefficients de la fonction d'aire pour les indenteurs Berkovich et sphéroconique, déterminés pour $0 \leq h \leq 2000$ nm. On en déduit θ et θ_{diff} en fonction de la hauteur de contact.

Table 2. Coefficients of the area function for the Berkovich and spheroconical indenters.

coefficient	sphéroconique	berkovich
α_0	9,425	24,6002
α_1	21 902,12	81,674
α_2	-9693,07	1050,258
α_3	-4204,37	-1636,449
α_4	-2141,4	-929,881
α_5	-1299,39	-165,071
α_6	-922,23	304,832
α_7	-744,06	559,803
α_8	-657,5	692,07

Vérification expérimentale

Trois matériaux ont été testés avec deux indenteurs différents : un Berkovich usé et un cône de 60° ayant un rayon de pointe de $5 \mu\text{m}$. Ces pointes ont été étalonnées sur de la silice pour obtenir un module d'Young de 72 GPa. Les coefficients de l'équation (17) reliant l'aire de contact à la hauteur de contact sont réunis dans le tableau 2.

Les matériaux utilisés sont de l'aluminium, un aluminure de fer (FeAl), de la silice refondue (SiO_2) et du silicium d'orientation cristalline (100). Leurs propriétés mécaniques sont regroupées dans le tableau 3.

Tableau 3. Propriétés mécaniques des matériaux utilisés pour la vérification expérimentale des expressions précédentes.

Table 3. Mechanical properties of the materials used to verify the previous relations.

matériau	E (GPa)	Y (GPa)	Et (GPa)	v	source
FeAl	210	0,923	4,54	0,3	Essai de traction
Al	70	0,035	0,3	0,345	
SiO_2	72	7,100	5	0,18	[17]
Si (100)	170	7	0	0,278	[17]

La silice ne présente pas de phénomène d'écrouissage à proprement parler, mais elle subit de la densification, qui peut être prise en considération en ajustant la pente d'écrouissage.

Les figures 16 et 17, représentant les courbes calculées et expérimentales pour chaque matériau et pour chaque indenteur, montrent

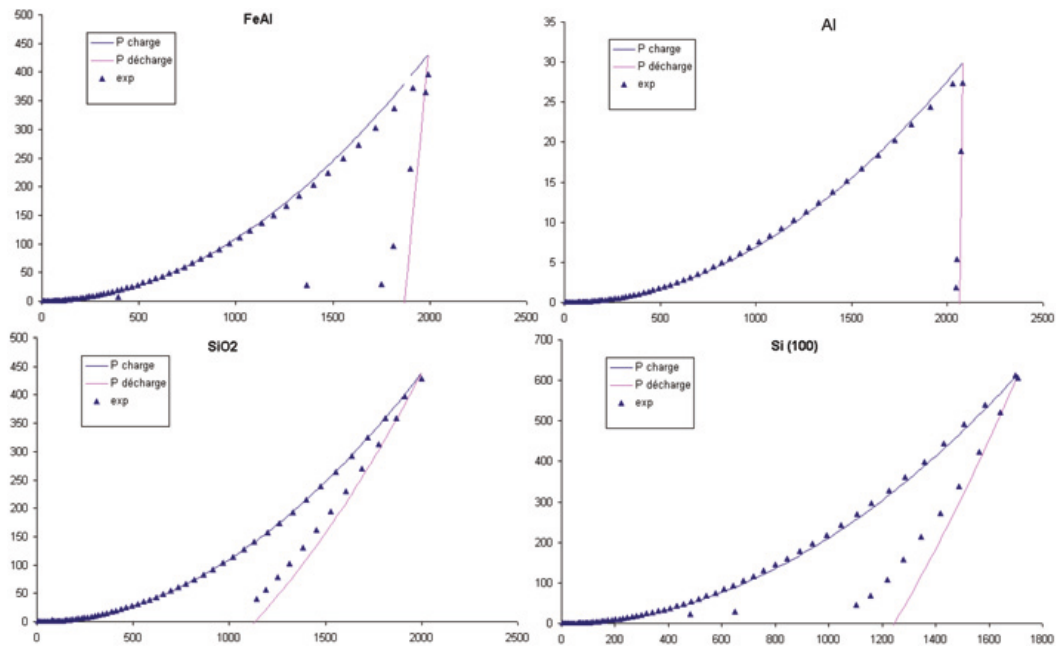


Fig. 16. Courbes d'indentation avec l'indenteur Berkovich représentant la charge (mN) en fonction du déplacement de l'indenteur (nm) déterminés expérimentalement et par le calcul.

Fig. 16. Experimental and calculated indentation curves for the Berkovich indenter.

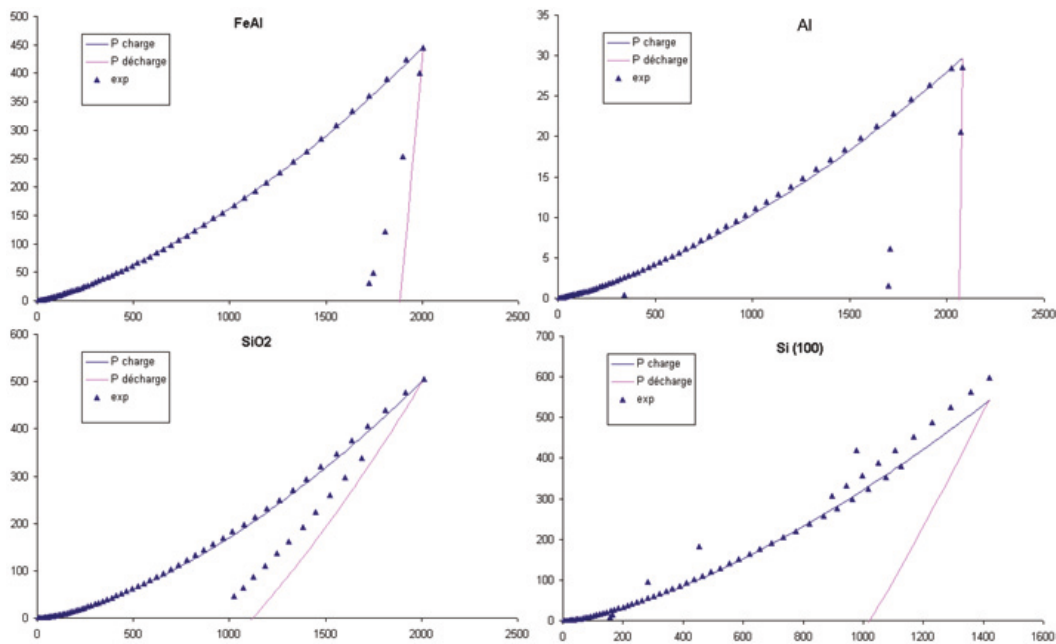


Fig. 17. Courbes d'indentation avec l'indenteur d'angle 60° et de rayon de pointe 5 μm représentant la charge (mN) en fonction du déplacement de l'indenteur (nm), déterminés expérimentalement et par le calcul.

Fig. 17. Experimental and calculated indentation curves for the sphericoconical indenter.

un très bon accord. Les courbes expérimentales ont été obtenues en moyennant plusieurs courbes effectuées dans les mêmes conditions. Comme indiqué auparavant, seule la première moitié de la décharge est

capable d'être déterminée par les expressions (18) et (19). Le décrochement de la courbe du silicium indenté par un indenteur sphéroconique est dû à un phénomène de pop-in, caractéristique de ce matériau.

Conclusions

Le problème de l'indentation par un cône d'un matériau élastoplastique à écrouissage linéaire a été étudié par simulation numérique et les résultats ont été comparés avec les valeurs issues de la théorie du contact élastique.

La possibilité d'adapter la solution élastique est mise en évidence, permettant ainsi de calculer la pression moyenne de contact en introduisant une déformation représentative pour tenir compte de la plasticité et de l'écrouissage et en déterminant la contrainte correspondant à cette déformation :

$$\sigma_r = Y + \frac{\epsilon_r}{\frac{1}{Et} - \frac{1}{E}}. \text{ On définit ainsi un indice}$$

$$\text{de plasticité } X' = \frac{E_r}{\sigma_r \tan \theta} \text{ qui permet, à par-}$$

tir de la solution élastique, de relier la pression moyenne de contact sous l'indenteur aux paramètres de la loi de comportement

$$\text{du matériau : } pm = \frac{E_r}{2(\beta X' + 1) \tan \theta}. \text{ Cette}$$

relation reste valable pour un problème élastique et elle est compatible avec les observations de Tabor concernant les matériaux au comportement rigide parfaitement plastique. Les simulations numériques de l'indentation indiquent que cette relation prend également en compte le comportement de matériaux à écrouissage linéaire.

En considérant la forme que prend le matériau sur les bords de l'indenteur au

$$\text{moyen du facteur de forme } c^2 = \frac{\beta X' + 1}{\sqrt{\frac{\beta X'}{c_p^4} + \frac{1}{c_e^4}}},$$

on parvient à tracer la courbe d'indentation : $F = pm \cdot c^4 \cdot h^2 \cdot \tan^2 \theta$ et à relier la loi de comportement du matériau aux mesures effectuées F et h .

Ces relations sont enfin adaptées à des indenteurs axisymétriques de formes différentes (pour tenir compte d'un émoussement de la pointe ou pour obtenir plus d'informations sur le matériau étudié) en introduisant dans les expressions précédentes deux angles θ et θ_{diff} correspondant respectivement à l'angle d'un cône équivalent en terme d'aire de contact et à l'angle d'attaque.

Ces expressions, relativement simples par rapport aux modèles existants, présentent également un meilleur accord avec les résultats expérimentaux et simulés.

Références

- [1] G.R. Anstis, P. Chantikul, B.R. Lawn, *J. Am. Ceramic Soc.* **64** (9) (1981) 533-538
- [2] Y. Bisrat, S.G. Roberts, *Mat. Sci. Eng. A* **288**, 2000, 148-153
- [3] J.-L. Bucaill, Simulation numérique de l'indentation et de la rayure des verres organiques, thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001
- [4] M. Dao, N. Chollacoop, K.J. Van Vliet, T.A. Venkatesh, S. Suresh, *Acta Mater* **49**, 2001, 3899-3918
- [5] E. Felder, Le contact métal-outil en mise en forme des matériaux. Frottement, lubrification, état de surface, usure. Séminaire de l'École des Mines de Paris, Tome II
- [6] A.E. Giannakopoulos, S. Suresh, *Scripta Materialia* **40**(10) (1999) 1191-1198
- [7] R. Hill, E.H. Lee, S.J. Tupper, *Proc. R. Soc. London A* **188** (1947) 273-290
- [8] K.L. Johnson, Contact mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [9] P. Laval, Étude théorique et expérimentale de l'indentation des matériaux élastoplastiques homogènes ou revêtus – Application à la mesure de la rhéologie et à l'adhérence des films minces, thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995
- [10] D.M. Marsh, *Proc. R. Soc. London A* **279** (1964) 420-435
- [11] W.C. Oliver, G.M. Pharr, *J. Mat. Res.* **7**(6) (1992) 1564-1583
- [12] C.M. Perrot, *Wear* **45**(3) (1977) 293-309
- [13] C. Ramond-Angeles, Analyse mécanique des essais d'indentation sur matériaux élasto-plastiques homogènes ou multi-couche – Application à la caractérisation de la rhéologie et de la tenue mécanique des films minces, thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1998
- [14] J.N. Robinson, A.H. Shabak, *Metall. Trans.* **4** (1973) 2091-2095
- [15] I.N. Sneddon, *Int. J. Eng. Sci.* **3**(1) (1965) 47-57
- [16] D. Tabor, The hardness of metals, Clarendon Press, Oxford (1951)
- [17] S.W. Yoon, C.G. Khang, *Mat. Sci. Eng. A* **390** (2005) 233-239
- [18] W. Yu, J.P. Blanchard, *J. Mat. Res.* **11**(9) (1996) 2358-2367
- [19] H. Zhang, D.Y. Li, *Surf. Coatings Techn.* **197** (2005) 137-141